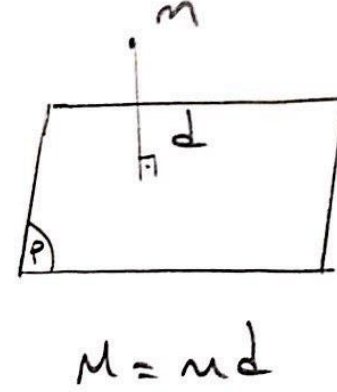
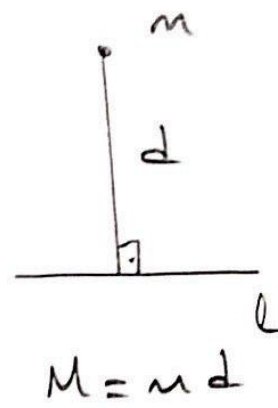
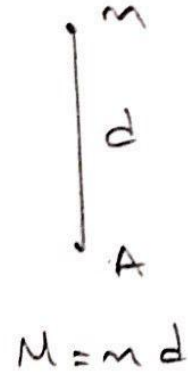


Moment ve ağırlık merkezi

Tanım: Bir parçacığın kütlesi ile bir nokta, eksen veya düzleme olan uzaklığının çarpımına nokta, eksen veya düzleme göre momenti denir.



Cisim bir parçacık değil de kütleleri m_1, m_2, \dots, m_n olan bir sistem ise her bir parçacığın nokta, eksen veya düzleme uzaklığı, sırasıyla, d_1, d_2, \dots, d_n olmak üzere sistemin momenti

$$M = \sum_{k=1}^n m_k d_k$$

olur

Eğer cisim bir eğri parçası, bir düzlem parçası veya bir katı cisim ise momenti sonra toplam şeklinde hesaplayabiliriz.

Tanım: Bir eğri parçasının kütlesinin yay uzunluğuna göre değişim oranı

$$\sigma = \frac{dm}{ds}$$

ya yoğunluk fonksiyonu denir.

Levha için yoğunluk fonksiyonu $\sigma = \frac{dm}{dA}$ ve katı

cisim için yoğunluk fonksiyonu $\sigma = \frac{dm}{dV}$ dir.

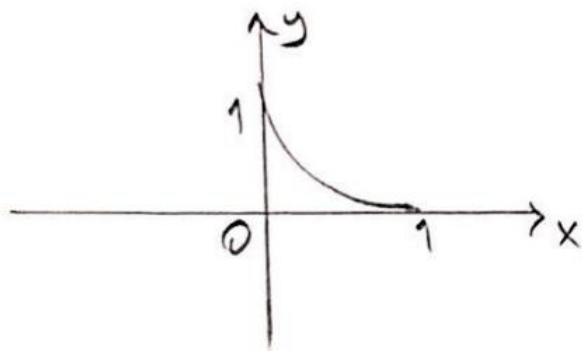
O halde bir $y=f(x)$ eğrisinin $[a, b]$ aralığı üzerinde parçasının kütlesi

$$m = \int_a^b \sigma ds = \int_a^b \sigma \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

ile hesaplanır.

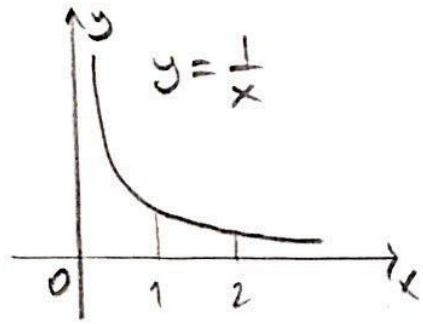
Benzar şekilde bir levhanın kütlesi $m = \int \sigma(x) dA$ ile hesaplanır.

Örnek: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ eğrisinin 1. bölgedeki parçası üzerine yerleştirilmiş bir telin her noktadaki yoğunluğu orok. taraftan apisinin karesine eşittir. Bu telin kütlesini bulalım.



$$\begin{aligned} \frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} y^{-1/3} y' &= 0 \Rightarrow y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} \\ \Rightarrow m &= \int_0^1 \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}} dx \\ &= \int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x^{2/3} + 1 - x^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^{1/3}} dx \\ &= \int_0^1 x^{5/3} dx = \frac{3}{8} x^{8/3} \Big|_0^1 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Örnek: $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, $x=1$, $x=2$ doğruları ve x eksenini tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktada yoğunluğu, o noktanın apsisinin 2 katıdır. Levhanın kütleliğini bulalım.



$$\sigma(x) = 2x$$

$$m = \int_1^2 \sigma(x) dx = \int_1^2 2x \cdot \frac{1}{x} dx = 2x \Big|_1^2 = 4 - 2 = 2.$$

Bir eğrinin momenti

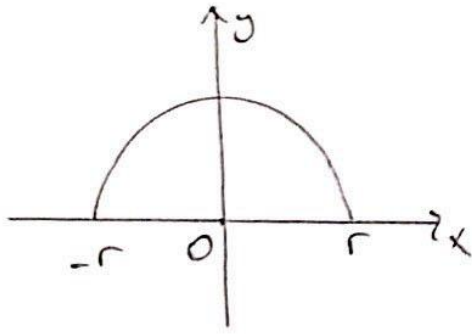
$y = f(x)$ eğrisinin $[a, b]$ aralığındaki parçasının

x eksenine göre momenti $M_x = \int_a^b f(x) \sigma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

y " " " " $M_y = \int_a^b x \sigma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

orijine " " " $M_0 = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2} \sigma(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Örnek: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yarı çemberi biçimindeki bir telin yoğunluk fonksiyonu $\sigma(x) = k = \text{sabit}$ olduğuna göre bu telin x eksenine göre momentini hesaplayalım.



$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

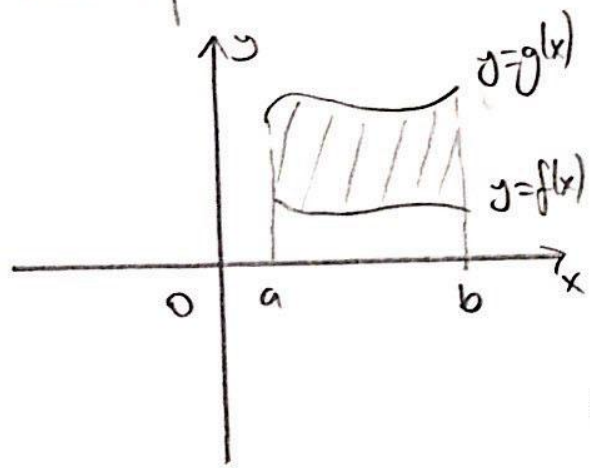
$$\Rightarrow M_x = \int_{-r}^r f(x) \sigma(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} k \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$= rk \int_{-r}^r dx = 2r^2k$$

Bir levhanın momenti

f ve g , $[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar, her $x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun. $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ bölgesine yerleştirilmiş $\sigma(x)$ yoğunluk fonksiyonuna sahip bir levhanın;



x eksenine göre momenti

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) \sigma(x) dx$$

y eksenine göre momenti

$$M_y = \int_a^b (g(x) - f(x)) x \sigma(x) dx$$

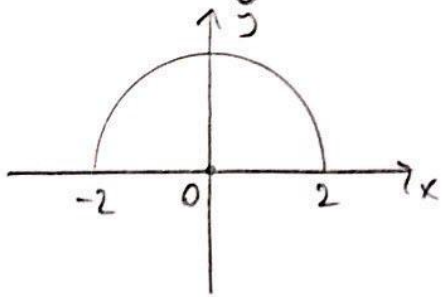
Ağırlık (kütle) merkezi

Çoğu mekanik sistem kütlesi ağırlık merkezi denilen tek bir noktada yoğunlaşmış gibi hareket eder. Ağırlık merkezi (\bar{x}, \bar{y}) olmak üzere

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

dir.

Örnek: $y = \sqrt{4-x^2}$ yarıçemberi birimindeki bir telin yoğunluğu, her noktada o noktanın ordinatının 2 katıdır. Bu telin ağırlık merkezini bulalım.



$$\sigma(x) = 2y = 2\sqrt{4-x^2}$$

$$m = \int_{-2}^2 \sigma(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_{-2}^2 2\sqrt{4-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{-2}^2 2\sqrt{4-x^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 16$$

$$M_x = \int_{-2}^2 f(x) \sigma(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} \cdot 2 \sqrt{4-x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 4 \left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} \right) \Big|_{-2}^2 = 8\pi$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{8\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$$

$$M_y = \int_{-2}^2 x \sigma(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_{-2}^2 x \sqrt{4-x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = x^2 \Big|_{-2}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{M_y}{m} = 0$$

0 halde ağırlık merkezi:
 $(0, \frac{\pi}{2})$

dir.